

1. а) Докажите, что, как ни пытаться рассадить одиннадцать кроликов по десяти клеткам, всегда найдется **хотя бы** одна клетка, в которой окажется **не менее** двух кроликов. (Идея, выраженная формулировкой этой задачи, и называется *принципом Дирихле*¹).

б) Докажите, что, как ни пытаться рассадить десять кроликов по десяти клеткам, при этом не оставляя пустых клеток, в **каждой** из них окажется **в точности** по одному кролику. (Идея этой задачи тоже называется принципом Дирихле).

2. а) Докажите, что в любой футбольной команде есть два игрока, которые родились в один и тот же день недели.

б) Докажите, что среди жителей Москвы найдутся десять тысяч празднующих день рождения в один и тот же день.

3. Докажите, что в любой компании из пяти человек есть двое имеющих одинаковое число знакомых (имеются в виду знакомые только из этой самой компании, причем знакомство, как и дружбу, мы считаем, как выражаются математики, симметричным отношением: если А. знаком с Б., то и Б. знаком с А., кто бы ни были эти А. и Б.).

4. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11.

5. Найдется ли среди чисел вида $111 \dots 1$ число, которое делится на 57?

6. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено пять точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше $\frac{1}{2}$.

7. а) Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом уголке из трех полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?

б) Какое наименьшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом уголке из трех полей было по крайней мере одно черное поле?

8. В Простоквашинской начальной школе учится всего 20 детей. У каждых двух из них есть общий дедушка. Докажите, что у одного из дедушек в этой школе учится не менее 14 внуков и внучек.

9. В классе 25 учеников. Известно, что из любых трех из них найдутся двое, которые дружат между собой. Докажите, что в классе есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

¹Дирихле (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet; 1805 – 1859) – немецкий математик, внесший существенный вклад в математический анализ, теорию функций, математическую физику и теорию чисел. Член, в том числе, и российской Императорской Санкт-Петербургской академии наук.