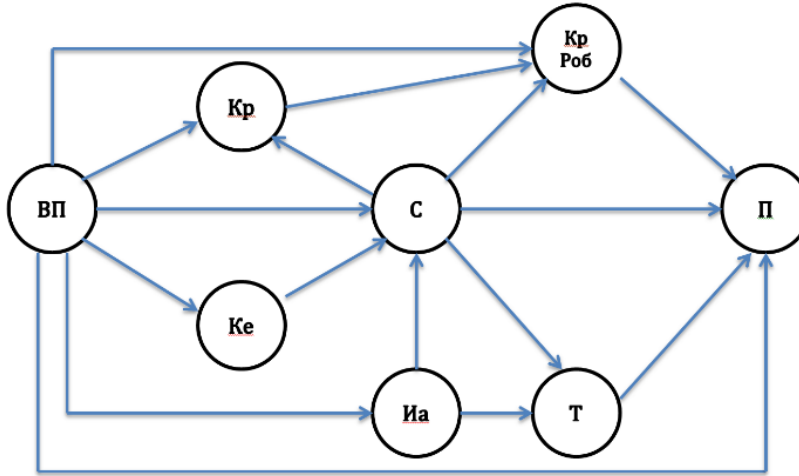


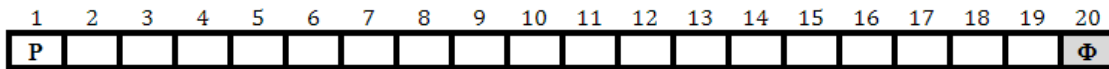
Занятия для поступающих в математико-информационный класс школы №57.

Занятие 3. Динамическое программирование.

Задача 1. Как-то раз Винни-Пух (ВП) решил отправиться в гости к Пятачку (П). Как известно, в Чудесном лесу много тропинок, и Винни-Пух может пройти к Пятачку, попутно посетив других его обитателей: Кролика (Кр), ослика Иа-Иа (Иа), Сову (С), Кенгу (Ке), Тигра (Т) и Кристофера Робина (Кр Роб). На рисунке приведена схема тропинок. Подсчитайте, скольким способами Винни-Пух может добраться до дома Пятачка.



Задача 2. Робот (Р) находится в первой клетке узкого коридора, шириной в одну клетку и длиной в 20 клеток. Задача робота – попасть в последнюю клетку коридора (отмечена буквой Ф – «финиш»).



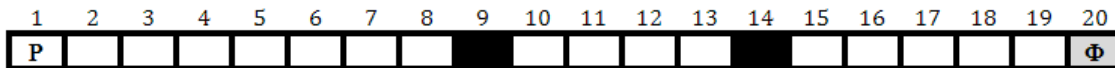
У робота есть две команды:

- “Вперед” – эта команда перемещает робота на одну клетку вперед (например, из клетки с номером 3 в клетку с номером 4)
- “Телепортируйся” – эта команда перемещает робота из клетки с номером X в клетку с номером $2X$ (например, из 10 клетки в 20, из 4 в 8 и т. д.).

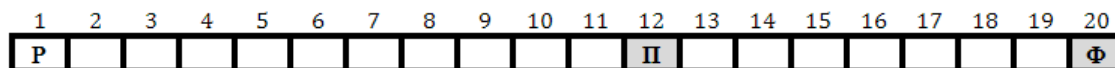
а) Сколько есть способов у робота попасть в клетку «Ф»?

б) Усложним задачу для робота: в некоторых клетках в коридоре есть ямы (на рисунке отмечены чёрным).

При попадании в яму робот ломается и не может дальше продолжать путь. Сколько у робота способов добраться до клетки «Ф» и при этом не разрушиться?



в) Новая задача: теперь робот должен добраться до клетки «Ф» и при этом обязательно посетить клетку «П» (приз), так как в этой клетке лежит супероружие, которое робот обязательно должен забрать. Сколько есть способов у робота выполнить эту задачу?



Задача 3. Сколько существует последовательностей длины 12, состоящих из 0 и 1 и не содержащих трёх подряд идущих единиц?

Задача 4. Сколько существует последовательностей длины 6, состоящих из десятичных цифр (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и не содержащих двух подряд идущих чётных цифр?

Задача 5. Сколько существует 5-значных чисел, в которых сумма любых двух соседних цифр является простым числом?

Задача 6. Робот находится на клетчатом поле. За один шаг, робот может перейти на одну клетку вправо или вверх; при этом по черным клеткам ходить запрещено.

а) Сколькими способами робот может добраться до верхней клетки поля?

									Ф
Р									

б) Поле, по которому нужно пройти роботу, покрыто лавой и при движении по нему робот получает повреждения. Для каждой клетки известно, сколько очков повреждения получит робот, если встанет на эту клетку. Есть и безопасные клетки – если робот встанет на эту клетку, он получит 0 повреждений. И всё-таки роботу нужно добраться до правой верхней клетки. Какое минимальное количество повреждений он при этом может получить?

1	1	1	2	1	2		4	3	Ф
1		2	1	5	4	3	2	1	3
2	4	3	4		3	3	3		5
0	0	2	4	2	4		4	4	4
1		3	3		4	4	2	4	4
4	5	1	2	5	4	3	5	4	6
3	2		3	3	2		1	6	5
1	1	2	2	2	3	3	5		3
1	2	1	1		2	2	5	2	1
Р	0	0	3	7	1		4	3	1

Задача 7. Сколькими способами можно представить число 11 в виде суммы целых положительных слагаемых? Решите задачу при условии, что представления, отличающиеся лишь порядком слагаемых (например, $11 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4$ и $11 = 4 + 2 + 1 + 3 + 1$), считаются: а) различными; б) одинаковыми.

Задача 8. Непустая числовая (и не только) последовательность называется палиндромом, если она читается справа налево так же, как и слева направо. Например, палиндромами являются последовательности (1, 2, 3, 3, 2, 1), (5, 2, 4, 2, 5), (3,3,3,3,3,3,3), (1), (4, 1, 1, 4), но НЕ являются последовательности (1,2,2,2), (53, 3, 5), (2,2,3,2). Сколькими способами можно вычеркнуть один или более элементов из последовательности (3, 2, 3, 1, 3, 2, 2, 1) так, чтобы НЕвычеркнутые числа образовывали бы палиндром? Способы считаются различными, если различаются позиции, в которых были вычеркнуты числа. Способы, отличающиеся лишь порядком вычеркивания, считаются одинаковыми. Различные способы вычеркивания вполне могут привести к одинаковым последовательностям.

Задача 9. Последовательность из скобок (“(”, “)”) называется правильной скобочной последовательностью, или ПСП, если она может быть получена из какого-то корректного математического выражения, состоящего из чисел, знаков $+*$ / $-$ и скобок путем удаления из нее всех чисел и арифметических знаков. Например, последовательности (), (()), ()(), (())(), (())()()()()()()() являются ПСП, а последовательности),)()(((, (((()), (()))((()) - нет. Сколько существует ПСП длины 12?

Задача 10. Назовем число хорошим, если оно состоит только из чисел 1,2,3, причем цифры 1 и 3 никогда не стоят рядом. Найдите остаток от деления количества хороших чисел длины X на 57, если: а) $X = 10$; б) $= 100$.