Занятия для поступающих в математико-информационный класс школы №57.
Занятие 1. Делимость и остатки.

Определение 1. *Будем говорить, что целое число b делит целое число a, если существует такое целое число d, что $a = bd$. Также в этом случае говорят, что b является делителем a, или что a делится на b. Обозначение: $b|a$.*

Определение 2. *Пусть a, b, q, r — целые числа, причем $0 \leq r < b$, и $a = bq + r$. В этом случае говорят, что a дает при делении на b (неполное) частное q и остаток r.*

Задача 1. В верхней строке таблицы указано то, что дано. В левом столбце — то, что спрашивается. Заполните пустые клетки: если "да", то поставьте "+", если "нет", то "−", если данных не хватает, то знак "?". Обоснуйте свои ответы.

	$m \mid a$ и $m \mid b$	$m \mid a$ и $m \nmid b$	$m \nmid a$ и $m \nmid b$
$m \mid a + b$?			
$m \mid a - b$?			
$m \mid a \cdot b$?			

Задача 2. а) Верно ли, что если a делится на m и b делится на n, то ab делится на mn? б) Верно ли, что если a делится на b и b делится на c, то a делится на c? Обоснуйте свои ответы.

Задача 3. Заполните табличку:

a	**b**	**q**	**r**
100	37		
20	37		
111	37		
-100	37		
-20	37		
0	37		

Задача 4. а) Постройте таблицы умножения по модулям 5 и 6; другими словами, для каждой пары чисел i, j запишите в таблицу остаток от деления $i \cdot j$ на 5 и 6 соответственно.

mod 5	**1**	**2**	**3**	**4**
1				
2				
3				
4				

mod 6	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1					
2					
3					
4					
5					

б) По какому модулю (из 5 и 6) у каждого ненулевого числа есть обратное?

в) По какому модулю (из 5 и 6) есть ненулевые числа, которые в произведении дают 0?

Задача 5. а) Докажите, что число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2. б) Выведите признак делимости на 4, связанный с двумя последними цифрами.

Задача 6. Петя заметил, что если из числа вычесть сумму его цифр, то получится число, кратное 9. а) Докажите этот факт. б) Сформулируйте на его основе признаки делимости на 9 и 3.

Задача 7. а) Разряды числа занумеровали по порядку справа налево (первый — разряд единиц, второй — разряд десятков и так далее). После этого к числу прибавили сумму цифр в чётных разрядах и вычли сумму цифр в нечётных разрядах. Докажите, что полученное число делится на 11. б) Сформулируйте признак делимости на 11.

Задача 8. В числе 65432789 вычеркните наименьшее количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 36.

Задача 9. Сколько имеется четырехзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них 97?

Задача 10. Швондер придумал ребус, в котором фигурируют числа БОРМЕНТАЛЬ и ГЛАВРЫБААБЫРВАЛГ. Профессор Преображенский утверждает, что оба этих числа — составные. Прав ли профессор?

Задача 11. а) Докажите, что квадрат натурального числа имеет нечётное количество делителей. б) Верно ли обратное?

Задача 12. В некотором государстве была тюрьма, в каждой из ста камер которой сидело по одному заключённому. Камеры были пронумерованы числами от 1 до 100, а замки в них были устроены так, что при одном повороте ключа дверь открывалась, при следующем повороте — закрывалась и т. д. Царь в то время воевал с соседним государством, и в какой-то момент ему показалось, что он побеждает. На радостях царь послал гонца с указанием отпереть все камеры, но затем ход военных действий изменился, и царь послал другого гонца вдогонку первому, наказав ему повернуть ключ в замке в каждой второй камере; затем был послан следующий гонец, чтобы повернуть ключ в замке у каждой третьей камеры, и т. д. Таким образом 100 гонцов прибывали в тюрьму один за другим и последовательно поворачивали замки в камерах. Сколько узников в итоге вышло на свободу и из каких камер?

Определение 3. *Целое положительное число $n > 1$ называется* **простым**, *если у него ровно два различных положительных делителя: 1 и само число n. Если количество делителей больше двух, то число n* **составное**.

Задача 13. Докажите, что если натуральное число n составное, то у него обязательно есть отличный от 1 делитель, квадрат которого не превосходит само число.

Задача 14. Являются ли простыми числа а) 899; б) 887? Ответ обоснуйте.

Задача 15. Пусть x, y — некоторые целые числа. Докажите, что если $4x + 3y$ делится на 5, то и $2x - y$ делится на 5.

Задача 16. Докажите, что последняя цифра в последовательности $a_n = (n-1)n(n+1)$ периодически повторяется.

Задача 17. Найдите последнюю цифру чисел а) 6^{2019}; б) 9^{2019}; в) 3^{2019}; г) 2^{2019}.

Задача 18. Докажите, что число $7^{1968^{1970}} - 3^{68^{70}}$ делится на 10.

Определение 4. *Наибольшим общим делителем целых чисел a и b, или НОД(a, b), назовем максимально возможное целое число c такое, что $c|a$ и $c|b$.*

Задача 19. Пусть n — целое число. Найдите наибольший общий делитель чисел $2n + 3$ и $n + 7$.

Задача 20. Выясните, при каких натуральных значениях n число $n^5 - n$ делится на 120.

Задача 21. Вася нашел число $100! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100$, затем сложил в этом числе все цифры. Получилось новое число, в котором он опять сложил все цифры, и так далее, пока не получилось однозначное число. Какое число получилось?

Задача 22. Сколькими нулями оканчивается произведение $100! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100$?